

Auswertung Zufallsstöße

Für die Auswertung werden auch wieder die bekannten Stoßtransformationen benötigt, weil nur Geschwindigkeitsbeträge und Winkel gespeichert sind.

$$\mathbf{w}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{v} - \mathbf{u} \quad (1)$$

Die Richtung der Relativgeschwindigkeit wird mit der Kugelkoordinaten-Transformation ermittelt, für die hier die in Mathcad eingebaute Funktion verwendet wird:

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \text{xyz2sph}(w(\mathbf{u}, \mathbf{v})_0, w(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1, w(\mathbf{u}, \mathbf{v})_2)_1 \quad (2)$$

$$\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \text{xyz2sph}(w(\mathbf{u}, \mathbf{v})_0, w(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1, w(\mathbf{u}, \mathbf{v})_2)_2 \quad (3)$$

Bei den Ergebnissen mit der ausführlichen Transformation gemäß dem Artikel über Kugelkoordinaten in Wikipedia, nimmt Φ Werte von 0 bis 2π an.

Die Stoßachsenwinkel ergeben sich i.A. zufallsabhängig, wobei gleichwahrscheinliche parallele Bahnen zur Richtung der Relativgeschwindigkeit angenommen werden. Das ist auf gleichwahrscheinliche parallele Bahnen bei den Stoßpartnern zurückzuführen. Damit ergibt sich kartesischen Koordinaten der Stoßachsenvektor:

$$\mathbf{S}_Z(\theta_s, \phi_s) := \begin{pmatrix} \cos(\phi_s) \cdot \sin(\theta_s) \\ \sin(\phi_s) \cdot \sin(\theta_s) \\ \cos(\theta_s) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Dieser wurde relativ zur Richtung der Relativgeschwindigkeit $\mathbf{w}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ erzeugt und muss nun im ursprünglichen Koordinatensystem (dem Laborsystem von \mathbf{u} und \mathbf{v}) ausgedrückt werden, was durch zwei hintereinander ausgeführte Drehungen erreicht wird:

$$\mathbf{D}_z(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \begin{pmatrix} \cos(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) & \sin(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) & 0 \\ -\sin(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) & \cos(\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{D}_y(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \begin{pmatrix} \cos(\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})) & 0 & -\sin(\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})) & 0 & \cos(\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Damit ergibt sich die Stoßachse im ursprünglichen Koordinatensystem durch das zweifache Zurückdrehen zu:

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) := \mathbf{D}_z(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{-1} \cdot \mathbf{D}_y(\mathbf{u}, \mathbf{v})^{-1} \cdot \mathbf{S}_Z(\theta_s, \phi_s) \quad (7)$$

Dieses \mathbf{S} entspricht beim Zentralstoß auf eine ruhende Kugel dem ursprünglichen \mathbf{u} bzw. beim Zentralstoß auf ein beliebiges \mathbf{v} allgemeiner dem Relativgeschwindigkeitsvektor \mathbf{w} normiert auf 1

Beim Stoß werden nun die zur Stoßachse parallelen Geschwindigkeiten der beiden beteiligten Kugeln ausgetauscht. Alle Vektoren sollen jedoch weiterhin im ursprünglichen Koordinatensystem betrachtet werden.

$$\mathbf{u}_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) := \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) \cdot \mathbf{u}) \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) := \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) \cdot \mathbf{v}) \quad (9)$$

parallele Geschwindigkeiten

$$u_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) := \mathbf{u} - u_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) \quad (10)$$

orthogonale Geschwindigkeiten

$$v_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) := \mathbf{v} - v_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) \quad (11)$$

$$u_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) := v_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) + u_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) \quad (12)$$

Geschwindigkeiten nach Stoß

$$v_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) := u_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) + v_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \theta_s, \phi_s) \quad (13)$$

Zur Analyse der Daten werden diese eingelesen und aus ihnen die interessierenden Elemente ermittelt, indem die Gesamtzahl durch 6 geteilt wird.

$$X := \text{READPRN}(\text{"PSI_i.prn"}) \quad (14)$$

$$kr := \text{rows}(X) \quad kr = 6 \quad kc := \text{cols}(X) \quad kc = 10000 \quad (15)$$

$$\text{Die Zahl der Stöße ist demnach hier} \quad z := \frac{kr \cdot kc}{6} \quad \text{also} \quad z = 10000 \quad (16)$$

Die einzelnen Vektoren werden deshalb durchnummeriert:

$$\text{Für } i := 0 \dots \frac{kr}{6} - 1 \quad \text{hier } i = \boxed{0} \quad j := 0 \dots kc - 1 \quad (17)$$

$$u_{i,j} := X_{[(i+1) \cdot 6] - 6, j} \quad \text{z.B.} \quad u_{0,0} = 1.03933293 \quad (18)$$

$$v_{i,j} := X_{[(i+1) \cdot 6] - 5, j} \quad v_{0,1} = 0.74912483 \quad (19)$$

$$\beta_{i,j} := X_{[(i+1) \cdot 6] - 4, j} \quad \beta_{0,0} = 1.25932266 \quad (20)$$

$$\Phi_{i,j} := X_{[(i+1) \cdot 6] - 3, j} \quad \Phi_{0,0} = 2.49064226 \quad (21)$$

$$\theta_{s_{i,j}} := X_{[(i+1) \cdot 6] - 2, j} \quad \theta_{s_{0,0}} = 1.05022939 \quad (22)$$

$$\phi_{s_{i,j}} := X_{[(i+1) \cdot 6] - 1, j} \quad \phi_{s_{0,0}} = 1.65441766 \quad (23)$$

Diese Zahlen kommen aus den Stoßversuchen, wo sie pro Teilchenpaar (also hier 10000) gespeichert werden. In der Datei "PSI_i.prn" werden sie nach jedem Durchlauf ersetzt. Zur Auswertung hier werden die Ergebnisse nur wieder zu Vektoren zusammengesetzt:

$$\mathbf{U}_{i,j} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{i,j} \end{pmatrix} \quad (24) \quad \mathbf{V}_{i,j} := \begin{pmatrix} v_{i,j} \cdot \sin(\pi - \beta_{i,j}) \cdot \cos(\Phi_{i,j}) \\ v_{i,j} \cdot \sin(\pi - \beta_{i,j}) \cdot \sin(\Phi_{i,j}) \\ v_{i,j} \cdot \cos(\pi - \beta_{i,j}) \end{pmatrix} \quad (25)$$

Dann können damit auch die zugehörigen neuen Geschwindigkeitsvektoren nach den Stößen angegeben werden:

$$\mathbf{u}_{s_{i,j}} := u_s(\mathbf{U}_{i,j}, \mathbf{V}_{i,j}, \theta_{s_{i,j}}, \phi_{s_{i,j}}) \quad (26) \quad \mathbf{v}_{s_{i,j}} := v_s(\mathbf{U}_{i,j}, \mathbf{V}_{i,j}, \theta_{s_{i,j}}, \phi_{s_{i,j}}) \quad (27)$$

Der Winkel β zwischen den Geschwindigkeitsvektoren vor dem Stoß hat vermutlich einen starken Einfluss auf die Veränderung der Geschwindigkeitsbeträge nach dem Stoß. Damit können die Veränderungen bei den Geschwindigkeitsbeträgen in Abhängigkeit der Flugwinkel β verfolgt werden. Weil die Geschwindigkeitsbeträge durch eine Maxwellverteilung erzeugt wurden, interessiert zuerst, ob und bei welchen Winkeln deren Unterschiede nach den Stößen kleiner sind als vor den Stößen, ob also ein Geschwindigkeitsausgleich durch Stöße möglich erscheint.

$$\mathbf{X}_{i,j} := |\mathbf{U}_{i,j}| - |\mathbf{V}_{i,j}| \quad x_{i,j} := |\mathbf{X}_{i,j}| \quad (28)$$

$$\mathbf{Y}_{i,j} := |\mathbf{u}_{s_{i,j}}| - |\mathbf{v}_{s_{i,j}}| \quad y_{i,j} := |\mathbf{Y}_{i,j}| \quad (29)$$

Mit den Geschwindigkeitsbetragstabellen kann nun eine normale Subtraktion durchgeführt werden (es verbergen sich also jeweils 10000 Zahlen hinter einer Variablen):

$$\Delta X := x - y \quad (30)$$

Als Durchschnittswert ergibt sich nach den betrachteten z Stößen:

$$\Delta SX := \frac{\sum_i \sum_j \Delta X_{i,j}}{z} \quad (31)$$

hier demnach

$$\Delta SX = 0.03904433$$

Bei sehr großen Stoßzahlen strebt diese Zahl möglicherweise gegen einen Grenzwert, der in einer Uratomtheorie auch eine physikalische Bedeutung haben könnte.

Anfangs, also beim ersten Programmdurchlauf der zufälligen Stöße von 10000 Stoßpartnern, hatten alle den Geschwindigkeitsbetrag 1. Grafisch können die Abhängigkeiten der Geschwindigkeitsanpassung durch gemeinsame Betrachtung mit den zugehörigen Winkeln untersucht werden. Generell bedeutet eine Größe $\Delta X > 0$, dass die Geschwindigkeitsbetragsunterschiede vor dem Stoß größer waren als danach:

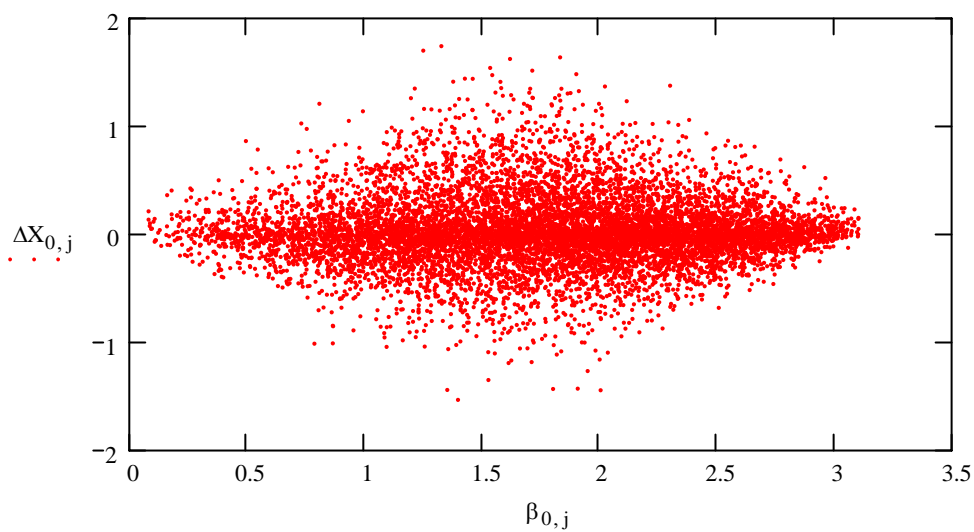
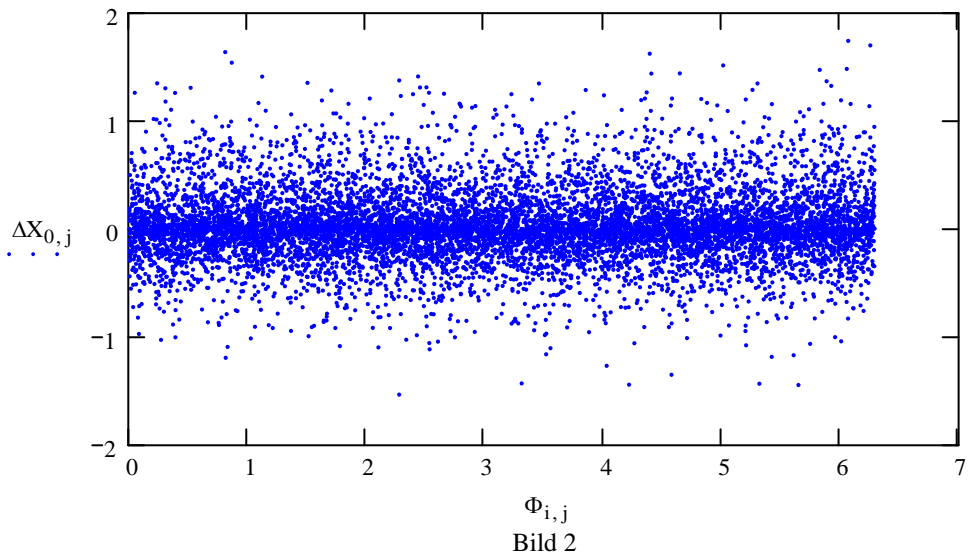
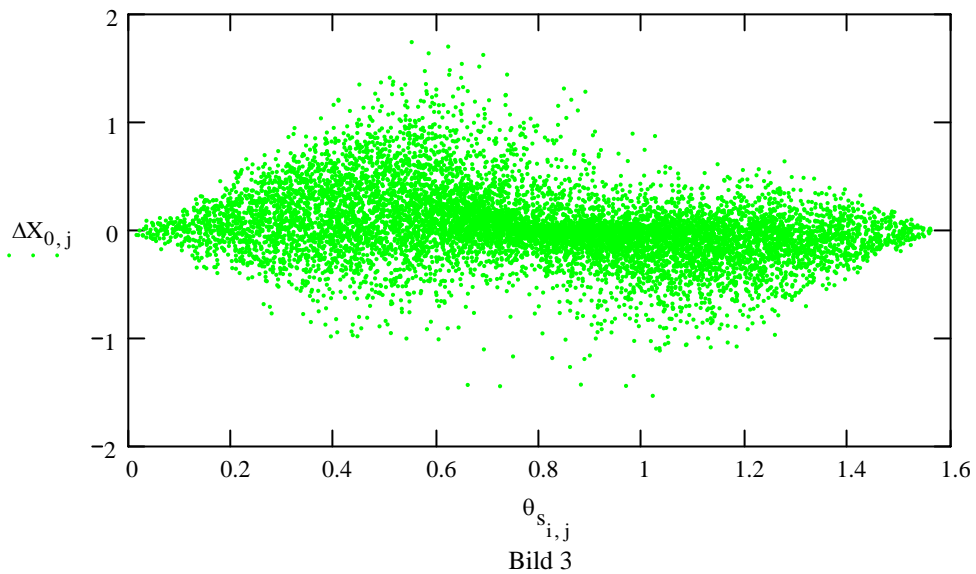


Bild 1

Mit wachsendem Flugwinkel (Bahnenwinkel) β nimmt die Veränderung der Geschwindigkeitsbetragsunterschiede ΔX bis zum orthogonalen Stoß zu und dann wieder ab. Die eingezeichnete Gerade $x = 0$ deutet auf eine Symmetrie hin. Bei bereits annähernd gleich großen Geschwindigkeitsbeträgen vor den Stößen werden oft größere Geschwindigkeitsunterschiede danach erzeugt, die eingezeichneten Punkte werden demnach anscheinend gleich oft negativ. Die vorkommenden Häufigkeiten werden aber auch durch die Häufigkeit der entsprechenden Winkel bei den zufälligen Stößen bestimmt.



Der Winkel Φ bezeichnet eine Drehung der Herkunftsrichtung um die Flugrichtung des Probeteilchens u. Diese hat keinen Einfluss auf die Ergebnisse => Symmetrie.



Der Stoßachsenwinkel θ beeinflusst die Geschwindigkeitsanpassungen bei den einzelnen Stößen. Bei kleineren Winkeln als $\pi/4$ kommen scheinbar mehr Fälle vor, bei denen der Betragsunterschied vor den Stößen größer war als nachher, um $\pi/4$ häufen sich Fälle mit vorher und nachher gleichen Geschwindigkeitsbetragsunterschieden und bei größeren Stoßachsenwinkeln werden mehr Unterschiede produziert, bis zur erneuten Abnahme solcher Fälle gegen $\pi/2$, also bei orthogonalen (Streif-) Stößen.

Die zufällige Drehung der Stoßachse verursacht einen ähnlichen Effekt:

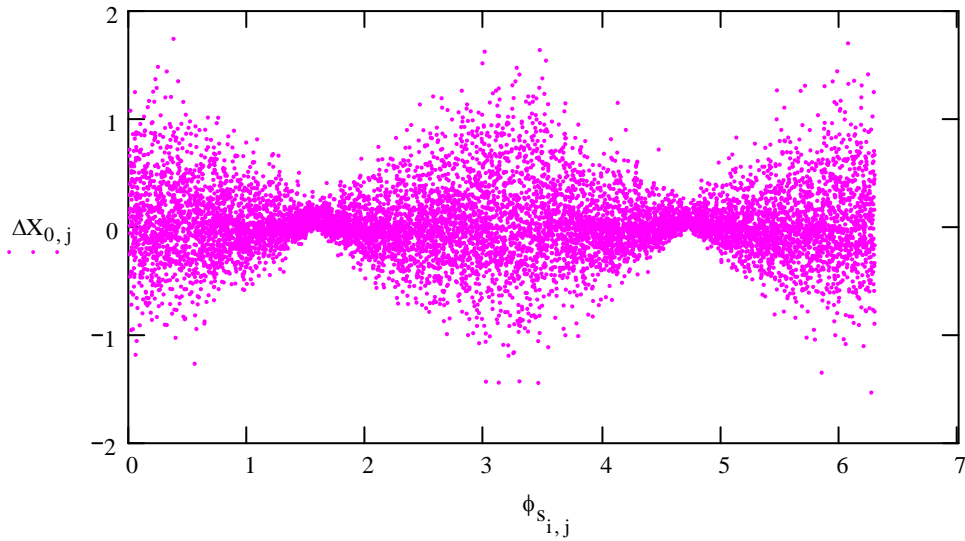


Bild 4

Wie schon oben erwähnt, wurden erst 10000 Stoßpartner betrachtet, bei denen der Geschwindigkeitsbetrag genau 1 betrug. Deren Zusammenstöße werden als Thermalisierung bezeichnet. Beim ersten Programmdurchlauf ergaben sich Bilder, die immer auf einer Seite der x-Achse lagen. Der durchschnittliche Geschwindigkeitsbetrag war 0.96401316. Die einzelnen Geschwindigkeitsbeträge sind auf den ersten Blick nicht nach der Maxwell-Verteilung verteilt. Bei vielen Stößen harter Kugeln, die bereits einer Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung unterliegen, bleibt diese aber erhalten, was auch schon bekannt ist (vgl.z.B. L. Brendel: B-stoss.pdf, Abbildung 10). Hier kann der sich ergebende Geschwindigkeitsmittelwert zur Normierung aller Teilchengeschwindigkeiten verwendet werden.

Es gilt:

$$m_{su} := \frac{\sum_i \sum_j |\mathbf{u}_{s,i,j}|}{z} \quad m_{su} = 0.92284923 \quad (32)$$

$$m_{sv} := \frac{\sum_i \sum_j |\mathbf{v}_{s,i,j}|}{z} \quad m_{sv} = 0.93013514 \quad (33)$$

Der **Geschwindigkeitsmittelwert** aller Kugeln nach den Stößen ist demnach:

$$m_s := \frac{m_{su} + m_{sv}}{2} \quad m_s = 0.92649218 \quad (34)$$

Ähnlich können nun mit dem gleichen Verfahren auch die Geschwindigkeitsbetragssummen untersucht werden:

$$\mathbf{XX}_{i,j} := |\mathbf{u}_{i,j}| + |\mathbf{v}_{i,j}| \quad xx_{i,j} := |\mathbf{XX}_{i,j}| \quad (35)$$

$$\mathbf{YY}_{i,j} := |\mathbf{u}_{s,i,j}| + |\mathbf{v}_{s,i,j}| \quad yy_{i,j} := |\mathbf{YY}_{i,j}| \quad (36)$$

$$\Delta Y := \mathbf{XX} - \mathbf{YY} \quad \text{ist der Unterschied dieser Summen vor und nach den Stößen.} \quad (37)$$

$\Delta Y =$	0	1	2	3	4	5
0	0.001571	-0.037696	0.059798	-0.021967	0.016982	0.015698

hier demnach

$$\Delta SY := \frac{\sum_i \sum_j \Delta Y_{i,j}}{z} \quad \Delta SY = -0.01127063 \quad (38)$$

Die Geschwindigkeitsbetragssummen sind hier demnach nach den Stößen im Durchschnitt größer als vorher, wegen der kleinen Abweichung von Null ist aber anzunehmen, dass diese im Durchschnitt bei natürlichen Stößen Null wird..

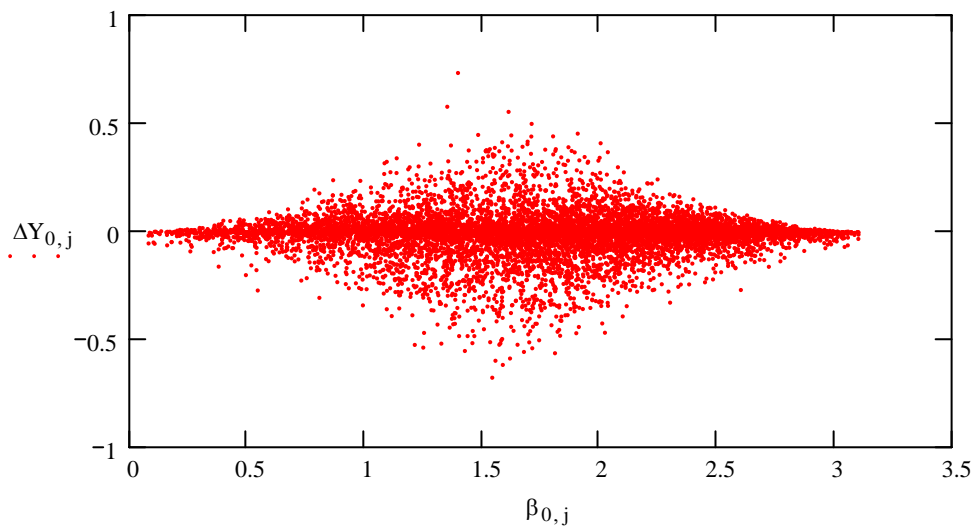


Bild 5

Deutlich erkennbar ist, dass bei orthogonalen Stößen die größten Änderungen der Geschwindigkeitsbetragssummen erfolgen. Zu- und Abnahmen der Geschwindigkeitsbetragssummen von vor zu nach den Stößen sind offensichtlich annähernd symmetrisch.

Der Winkel ϕ bezeichnet eine Drehung der Herkunftsrichtung um die Flugrichtung des Probeteilchens u. Diese hat wiederum keinen Einfluss auf die Ergebnisse, das Bild sieht gleich aus wie das obige.

$\Delta SY = -0.01127063$ ist das $< 0 \Rightarrow$ Geschwindigkeitsbetragszunahme

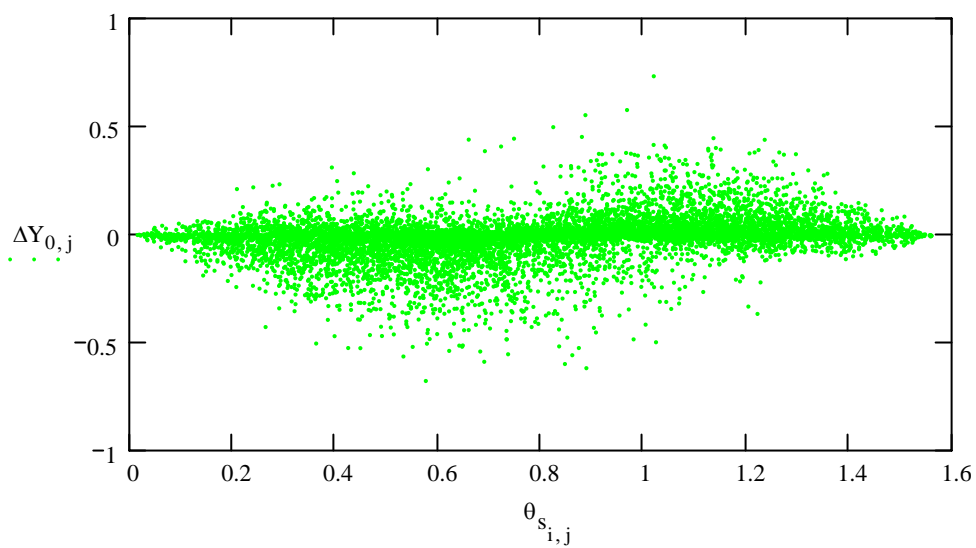
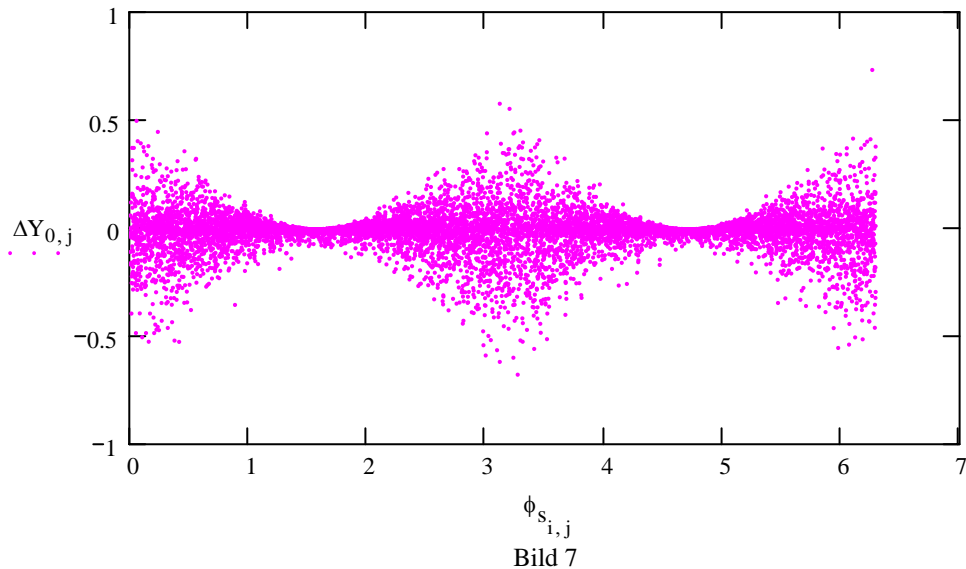


Bild 6

Beim Stoßachsenwinkel θ erfolgt bei den Winkeln 0 und $\pi/2$ keine Veränderung. Bis $\pi/4$ gibt es mehr Geschwindigkeitsbetragszunahmen, danach bis $\pi/2$ entsprechende Abnahmen.



Der Winkel ϕ dreht die Stoßachse um die Relativgeschwindigkeit. Das erscheint zwar als eine völlig symmetrische Operation $0 < \phi < 2\pi$, das Herausdrehen aus der Ebene der beteiligten Geschwindigkeitsvektoren führt dabei aber zu einem großen Einfluss der Veränderung der Stoßachsenrichtung. Diese hat ihrerseits einen großen Einfluss auf die Veränderung der Geschwindigkeitsbeträge. Vom Verlassen der Vektorebene bis zu orthogonalen Auftreffpunkten nimmt die Veränderung der Geschwindigkeitsbeträge ab, um danach wieder zu zunehmen, bis wieder die Vektorebene erreicht ist. Zu- und Abnahmen sind dabei wiederum symmetrisch.

Nun können aber auch noch zusätzlich die kompletten Geschwindigkeitsbetragssummen untersucht werden:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{XX}_{i,j} &:= |\mathbf{U}_{i,j}| + |\mathbf{V}_{i,j}|^2 \\
 \mathbf{YY}_{i,j} &:= |\mathbf{u}_{s_{i,j}}| + |\mathbf{v}_{s_{i,j}}|^2 \quad \text{bleiben gleich wie oben} \\
 \mathbf{XY} &:= \mathbf{XX} + \mathbf{YY} \tag{39}
 \end{aligned}$$

XY =	0	1	2	3	4	5
0	4.037733	2.281864	5.914408	2.921374	4.120055	3.349396

$$\text{hier demnach} \quad \mathbf{MXY} := \frac{\sum_i \sum_j \mathbf{XY}_{i,j}}{z} \quad \mathbf{MXY} = 3.69469811 \tag{40}$$

Die Geschwindigkeitsbetragssummen sind hier demnach nach den Stößen im Durchschnitt größer als vorher, wegen der kleinen Abweichung von Null ist aber anzunehmen, dass diese im Durchschnitt bei natürlichen Stößen Null wird..

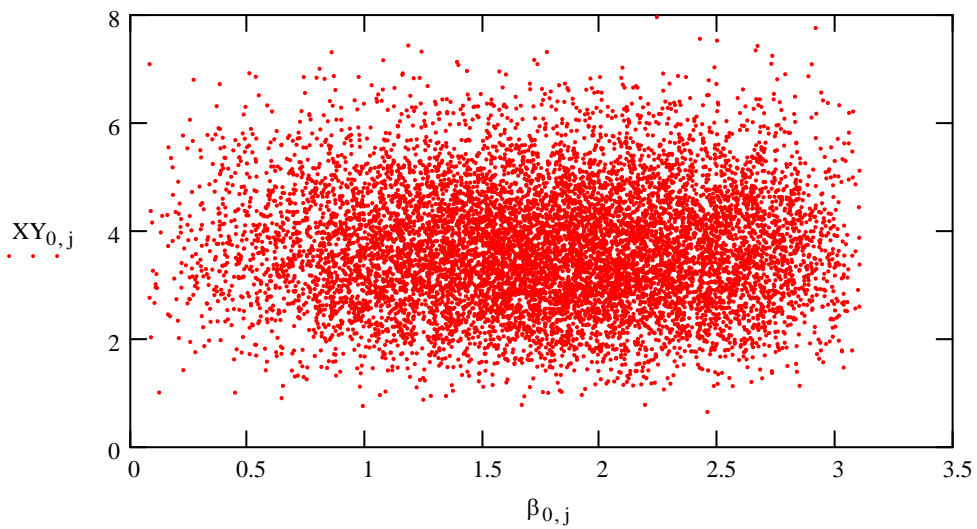


Bild 8

Deutlich erkennbar ist, dass die Geschwindigkeitsbetragssummen um das Zentrum $\beta = \pi/2$ und $XY = 4$ streuen. Zu- und Abnahmen der Geschwindigkeitsbetragssummen von vor zu nach den Stößen sind offensichtlich annähernd symmetrisch.

Der Winkel ϕ bezeichnet eine Drehung der Herkunftsrichtung um die Flugrichtung des Probeteilchens u. Diese hat wiederum keinen Einfluss auf die Ergebnisse, das Bild sieht gleich aus wie das obige.

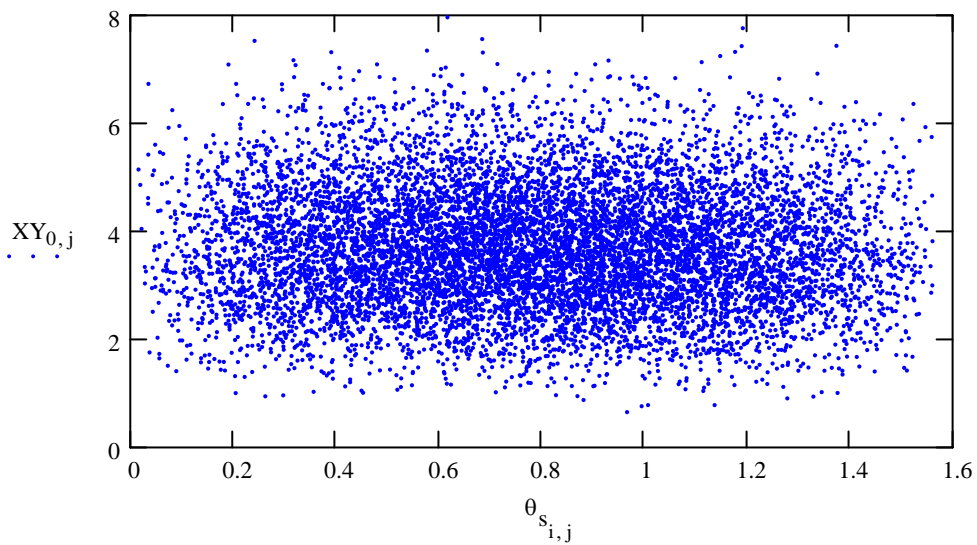


Bild 9

Beim Stoßachsenwinkel θ streuen die Betragssummen kaum merkbar um $\pi/4$ und sind auch symmetrisch um 4 verteilt. Das gleiche gilt noch stärker bei der Drehung der Stoßachse, da ist keinerlei Einfluss des Stoßachsenwinkels erkennbar, weshalb auf das Bild verzichtet wird.

Schade ist, dass dreidimensionale Bilder nur mit größerem Aufwand erzeugt werden können. Trotz vieler erkennbarer Symmetrien und gerade wegen dieser, lassen sich weiterhin mögliche Strukturbildungen im HKG vermuten.